



TITLE:

概均質Vector空間に付随する  
Dirichlet級数の一例 (代数的整数論  
における最近の諸問題研究会報告  
集)

AUTHOR(S):

新谷, 卓郎

---

CITATION:

新谷, 卓郎. 概均質Vector空間に付随するDirichlet級数の一例 (代数的整数論における最近の諸問題研究会報告集). 数理解析研究所講究録 1970, 89: 6-28

ISSUE DATE:

1970-05

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/108111>

RIGHT:

概均値 vector 空間に付随する, Dirichlet 級数の一例.  
東大 理数 新谷 卓郎

§0 導入

まず Riemann の zeta 函数の函数等式の証明を復習しよう。  $\varphi(x)$  を実軸上の急減少函数,  $s \in \mathbb{C}$  とし

$$Z_{\varphi}(s) = \int_0^{\infty} \sum_{\substack{x \in \mathbb{Z} \\ x \neq 0}} \varphi(tx) t^s dx$$

とおく。  $\text{Re } s > 1$  なるとき, 上記積分は絶対収束して

$$Z_{\varphi}(s) = \int_0^{\infty} \varphi(x) |x|^{s-1} dx \quad \text{に等しい。}$$

一方 Poisson の  $-\infty$  和公式によれば,

$$Z_{\varphi}(s) = \int_1^{\infty} \sum_{0 \neq x \in \mathbb{Z}} \varphi(tx) t^s dx - \frac{1}{s} \varphi(0) + \int_1^{\infty} \sum_{0 \neq x \in \mathbb{Z}} \hat{\varphi}(tx) t^{1-s} dx + \frac{1}{s-1} \hat{\varphi}(0)$$

$$(\hat{\varphi}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) e^{2\pi i \sqrt{-1} xy} dy)$$

なる等式が  $\text{Re } s > 1$  において成立する。従って  $Z_{\varphi}(s)$

は  $s=0$ ,  $s=1$  に高々一位の極をもつ有理型函数に解析接続され, かつ函数等式

$$Z_{\varphi}(1-s) = Z_{\varphi}(s) \quad \text{を満足することになる。}$$

一方  $\text{Re } s > 0$  において積分

$$\int_0^{\infty} \varphi(x) |x|^{s-1} dx$$

は絶対  $-\infty$  収束するが, これを  $s$  の函数として全平面で有理形な函数に解析接続され, 函数等式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) |x|^{s-1} dx = 2^{1-s} \pi^{-s} \cos \frac{\pi s}{2} \Gamma(s) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) |x|^{-s} dx \quad (\#)$$

を満足する。従、 $\zeta(s)$  を全平面で有理形な函数へ接続され、函数等式

$$\zeta(1-s) = 2^{1-s} \pi^{-s} \cos \frac{\pi s}{2} \Gamma(s) \zeta(s)$$

を満足することがわかる。

すなわち $\zeta(s)$ の函数等式の根拠は Poisson の和公式と変換則(＃)であるといふことができる。

佐藤幹夫氏は 概均質 vector 空間の理論を建設して “正則概均質 vector 空間”  $V$  の相対不変式の複素中が(＃)と類似の変換則を満足することを示し、 $V$  内の格子と相対不変式に対応する  $\zeta$  函数に類似の “distribution valued meromorphic function” を作、その函数等式を証明された。筆者は以下的小文において 特別な場合について 概均質 vector 空間と其中的格子に普通の  $\mathbb{C}$ -valued Dirichlet 級数を対応させることを試みた。すなわち §1. において 最も簡単な状況における 概均質 vector 空間  $V$  の理論の主結果を要約し、ついで  $V$  と其中的格子に付随す

る "Tate 型 積分" を考察し、極めて強い仮定のもとに、それから函数等式を満足する Dirichlet 級数をとりにだしうることを示した。§2 においては、実 Hermite 行列のなす vector space と、Gauss 整数を行列要素とする Hermite 行列のなす格子とについては §1 の仮定が満足されることを示し次の結果を得た。

定理

$L^{(n)}$  を Gauss の整数を行列要素とする  $n$  次 Hermite 行列の作る格子とし、 $L^{(n)*}$  を、対角元がすべて偶数なるものよりなる  $L^{(n)}$  の部分格子とする。

$m_i(l)$  を、Sylvester index が  $(i, n-i)$  行列式が  $(-1)^{n-i} l$  なる  $L$  の元達のなす種達の "種の測度" の和であるとする。さすれば Dirichlet 級数

$$\Sigma_i^{(n)}(s) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{m_i(l)}{l^s}$$

$$\Sigma_i^{(n)*}(s) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{m_i^*(l)}{l^s}$$

(  $m_i^*(l)$  は  $L^{(n)*}$  について  $m_i(l)$  と同様に定義される ) はともに  $\text{Re } s > n$  で絶対収束し、 $s = 1, 2, \dots, n$  に高々一位の極をもつ

有理型函数に解析接続され、函数等式

$$\begin{aligned} & \xi_i^{(n)}(n-s) \\ &= \pi^{-s} n + \frac{n(n-1)}{2} \Gamma(s) \Gamma(s-1) \cdots \Gamma(s-n+1) \times \\ & \times \sum_{j=0}^n (-1)^{(n-j)(n-1)} e^{\pi i \sqrt{s} (\frac{n}{2} - i - j)} \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} \binom{n-i}{j-k} e^{2\pi i k j} \times \\ & \times \xi_j^{(n)*}(s) \end{aligned}$$

を満足する。  $\prod_{k=1}^n (1-k) \xi_i^{(n)}(s)$  は位数高々  $n$  の整函数である。 なお  $\xi_i^{(n)}(s)$  の極における residue を explicit に計算できる。

§1  $V$  を実数体上の vector 空間,  $G$  を  $GL(n)$  内の連結実線型代数群とする。  $V$  内に代数的集合  $S$  があて,  $V-S$  内の点を通る  $G$  の任意の orbit が  $V$  内の開集合となつているとき, 対  $(G, V)$  を概均質 vector 空間とよび,  $S$  をその特異点集合という。以下  $G$  の  $V$  への作用を

$$(g, x) \longrightarrow g \cdot x \quad (g \in G, x \in V)$$

と書く。  $V$  の双対を  $V^*$  とし,  $G$  は  $V^*$  に反傾的に作用するとして, その作用を

$$(g, y) \longrightarrow {}^t g^{-1} \cdot y \quad (g \in G, y \in V^*)$$

と書く。定義より,

$$\langle g \cdot x, {}^t g^{-1} \cdot y \rangle = \langle x, y \rangle \quad (x \in V, y \in V^*)$$

である。  $V$  上の多項式  $P$  は,  $G$  の適当な有理指標  $\chi$  が存在して,  $P(gx) = \chi(g) P(x)$  ( $\forall g \in G, x \in V$ ) が成立するとき,  $(G, V)$  の指標  $\chi$  の相対不変式とよばれる。以下  $(G, V^*)$  も根元均質として, その特異点集合を  $S^*$  とする。  $V^*$  の相対不変式も同様に定義される。

以下  $V, V^*$  の相対不変式  $P, Q$  が存在して

$$P(gx) = \chi(g) P(x), \quad Q({}^t g^{-1} \cdot y) = \chi^{-1}(g) Q(y)$$

であり,  $x \in V - S, y \in V^* - S^*$  なるとき,  $x, y$  の等方群を  $H_x, H_y$  とかけば,  $\chi$  は一次元 torus  $G/H_x [G, G], G/H_y [G, G]$  の指標群の有限 index の部分群を生成し, さらに  $P$  の jacobian は  $V - S$  で非退化であると仮定する。このとき

$V - S, V^* - S^*$  は同数個の連結成分の和となり, 各々の連結成分は  $G$  の1つの orbit となっている。それらを  $V - S = \bigcup_{i=1}^l V_i, V^* - S^* = \bigcup_{i=1}^l V_i^*$  とかく。

$P, Q$  の次数は等しい。それを  $d$  とする。いま  $d$  次の多項式  $b(s), b^*(s)$  を

$$Q(\text{grad}_x) P^d(x) = b(s) P^{d-1}(x)$$

$$P(\text{grad}_y) Q^d(y) = b^*(s) Q^{d-1}(y)$$

として定義する。  $V, V^*$  の Euclid measure  $dx, dx^*$  を互いに dual であるように定める。すなわち  $\varphi \in \mathcal{S}(V)$

(以下  $V$  における急減少関数の空間を  $\mathcal{S}(V)$ ,  $V^*$  におけるそれを  $\mathcal{S}(V^*)$  とかく) とするとき

$$\hat{\varphi}(y) = \int_V \varphi(x) e^{2\pi i V^{-1} \langle x, y \rangle} dx$$

$$\iff \varphi(x) = \int_{V^*} \hat{\varphi}(y) e^{-2\pi i V^{-1} \langle x, y \rangle} dy^*$$

であるとしよう。さすれば  $\operatorname{Re} s > 0$  で定義される  $s$

の解析関数  $\int_{V_i} \varphi(x) |P(x)|^s dx$ ,  $\int_{V_i^*} \varphi^*(y) |Q(y)|^s dy^*$  は,  $\operatorname{Re} s$  が十分大になるとき成立する等式

$$\begin{aligned} & \int_{V_i} Q(\operatorname{grad}_x) \varphi(x) |P(x)|^s dx \\ &= (-1)^d (\operatorname{sgn}_i P) b(s) \int_{V_i} \varphi(x) |P(x)|^{s-1} dx \\ & \quad \int_{V_i^*} P(\operatorname{grad}_y) \varphi^*(y) |Q(y)|^s dy^* \\ &= (-1)^d (\operatorname{sgn}_i Q) b^*(s) \int_{V_i^*} \varphi^*(y) |Q(y)|^{s-1} dy^* \\ & \quad (\varphi \in \mathcal{S}(V), \quad \varphi^* \in \mathcal{S}(V^*) \text{ とし} \end{aligned}$$

$\operatorname{sgn}_i P$  は  $V_i$  における  $P$  の符号を意味する)

を用いて全平面で有理型なる解析関数に接続される。(以上を通じて,  $P, Q$  は  $V, V^*$  で実数値をとると仮定されている)。以上の状況のもとで次の定理が成立する。

定理 A (M. Sato)

$\varphi$  を  $\mathcal{S}(V)$  の元とする時, 次の変換公式が成立す。

$$b(s) = b_0 \prod_{i=1}^d (1 - s_i) \quad d(gx) = |x(g)|^d dx$$

とすれば" ( $d = \frac{n}{d}$  である)

$$\int_{V_i^*} |Q(y)|^{s-n} \hat{\varphi}(y) dy^*$$

$$= b_0^s (2\pi)^{-ds} (V^{-1})^{ds} \prod_{k=1}^d \Gamma(1 + s_k) \times$$

$$\times \sum C_{ij}(s) (\operatorname{sgn}_i Q \operatorname{sgn}_j P)^{-s} \int_{V_j} |P(x)|^{-s} \varphi(x) dx$$

( $C_{ij}(s)$  は  $e^{2\pi i V^{-1} s}$ ,  $e^{-2\pi i V s}$  のある多項式)。

以下  $L$  を  $V$  内の格子とし,  $L^*$  を  $L$  の双対格子とする。

すなわち

$$L^* = \{ y \in V^*, \langle x, y \rangle \in \mathbb{Z} \text{ for } \forall x \in L \}.$$

$$\text{いま } L' = L - (L \cap S), \quad L'^* = L^* - (L^* \cap S^*)$$

とおき,  $\Gamma$  を  $L$  を不変にする  $G$  の離散的部分群として

次の "Tate 型積分" を考える。すなわち  $\varphi \in \mathcal{S}(V)$ ,

$$\varphi^* \in \mathcal{S}(V^*), \quad s \in \mathbb{C} \text{ なるとき}$$

$$Z_{\varphi}^L(s) = \int_{G/\Gamma} |X(g)|^s \sum_{x \in L} \varphi(gx) dg$$

$$Z_{\varphi^*}^{L^*}(s) = \int_{G/\Gamma} |X'(g)|^s \sum_{y \in L'^*} \varphi^*(g^{-1}y) dg$$

ただし  $dg$  は  $G$  (unimodular とする) の不変測度

である。 $L$  あるいは  $L^*$  の二元  $x_1, x_2$  が  $\Gamma$  の作用で

たがいにうつり得るとき, 両者は同値であるといひ,



$x_1 \sim x_2$  とかく。  $L \cap V_i$  の諸元の同値類の代表系を  $\{x_i(l) \quad l=1, 2, \dots\}$ ,

$L^* \cap V_i^*$  の同値類の代表系を

$$\{y_i^*(l) \quad l=1, 2, \dots\}$$

とかく。  $G, \Gamma$  の部分群  $H_{i,l}, \Gamma_{i,l}$  を次の如く定義する。

$$H_{i,l} = \{g \in G, \quad g \cdot x_i(l) = x_i(l)\}$$

$$\Gamma_{i,l} = \Gamma \cap H_{i,l}$$

$G/H_{i,l}$  は写像  $g \in G/H_{i,l} \rightarrow g \cdot x_i(l)$  によって  $V_i$  と同一視される。測度  $|P(x)|^{-2} dx$  が、(これは定理 A で定義された)  $V_i$  の  $G$  不変測度であることに注意して、 $H_{i,l}$  の左不変測度  $dh_{i,l}$  を、 $dg = |P(g \cdot x_i(l))|^{-2} d(g \cdot x_i(l)) dh_{i,l}$

なるように定め、

$$m(x_i(l)) = \int_{H_{i,l}/\Gamma_{i,l}} dh_{i,l} \quad \text{と定義する。}$$

$H_{i,l}^*, \Gamma_{i,l}^*$   $m(y_i^*(l))$  を同様に定義される。いま次の仮定を“仮定 I”とよぼう。

仮定 I      Dirichlet 級数

$$\xi_i(s) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{m(x_i(l))}{|P(x_i(l))|^{-s}}$$

$$\xi_i^*(s) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{m(y_i^*(l))}{|Q(y_i^*(l))|^{-s}}$$

は  $\operatorname{Re} s$  が十分大なるとき絶対収束する。

命題 1. 仮定 I が成立するならば,  $Z_\varphi(s)$ ,  $Z_{\varphi^*}^{L^*}(s)$  を定義する積分は  $\operatorname{Re} s$  が十分大なるとき絶対収束し, 等式

$$Z_\varphi(s) = \sum_{i=1}^p \xi_i(s) \int_{V_i} |P(x)|^{s-2} \varphi(x) dx$$

$$Z_{\varphi^*}^{L^*}(s) = \sum_{i=1}^p \xi_i^*(s) \int_{V_i^*} |Q(y)|^{s-2} \varphi^*(y) dy^*$$

が成立する。

一方 Poisson の和公式によつて  $Z_\varphi$ ,  $Z_{\varphi^*}^{L^*}$  は次の如く変形される。

$$\begin{aligned} Z_\varphi(s) &= \int_{\substack{|X(g)| \geq 1 \\ G/\Gamma}} |X(g)|^s \sum_{x \in L'} \varphi(gx) dg \\ &\quad + c_L \int_{\substack{|X^*(g)| \geq 1 \\ G/\Gamma}} |X^*(g)|^{2-s} \sum_{y \in L'^*} \hat{\varphi}(g^{-1} \cdot y) dg \\ &\quad - \int_{\substack{|X(g)| \leq 1 \\ G/\Gamma}} |X(g)|^s \left\{ \sum_{x \in L \cap S} \varphi(gx) \right. \\ &\quad \left. - c_L \sum_{y \in L' \cap S^*} \hat{\varphi}(g^{-1} \cdot y) |X(g)|^{-2} \right\} dg \end{aligned}$$

$$\Gamma \backslash \Gamma' \backslash L \quad \frac{1}{c_L} = \int_{V/L} dx$$

$$\hat{\varphi}(y) = \int_V \varphi(x) e^{2\pi i \sqrt{-1} \langle y, x \rangle} dx$$

$$\begin{aligned}
& Z_{\varphi^*}^{L^*}(\lambda) \\
&= \int_{\substack{|\tilde{\chi}'(g)| \geq 1 \\ G/\Gamma}} |\tilde{\chi}'(g)|^\lambda \sum_{y \in L^*} \varphi^*(\tau \tilde{g}^{-1}, y) dg \\
&+ C_{L^*} \int_{\substack{|\chi(g)| \geq 1 \\ G/\Gamma}} |\chi(g)|^{2-\lambda} \sum_{x \in L'} \hat{\varphi}^*(g, x) dg \\
&- \int_{\substack{|\tilde{\chi}'(g)| \leq 1 \\ G/\Gamma}} |\tilde{\chi}'(g)|^\lambda \left\{ \sum_{y \in L^* \cap S^*} \varphi^*(\tau \tilde{g}^{-1}, y) - C_{L^*} \sum_{x \in L \cap S} \hat{\varphi}^*(g, x) |\tilde{\chi}'(g)|^\lambda \right\} dg \\
&\text{ただし } \frac{1}{C_{L^*}} = \int_{V^*/L^*} dx^* \quad \hat{\varphi}^*(x) = \int_{V^*} e^{2\pi i \langle x, y \rangle} \varphi^*(y) dy
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
W_{\varphi}^L(\lambda) &= \int_{\substack{|\chi(g)| \geq 1 \\ G/\Gamma}} |\chi(g)|^\lambda \sum_{x \in L'} \varphi(g, x) dg \\
&+ C_L \int_{\substack{|\tilde{\chi}'(g)| \geq 1 \\ G/\Gamma}} |\tilde{\chi}'(g)|^{2-\lambda} \sum_{y \in L^*} \hat{\varphi}(\tau \tilde{g}^{-1}, y) dg
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_{\varphi}^L(\lambda) &= \int_{\substack{|\chi(g)| \leq 1 \\ G/\Gamma}} |\chi(g)|^\lambda \left( C_L \sum_{y \in L^* \cap S^*} \hat{\varphi}(\tau \tilde{g}^{-1}, y) |\chi(g)|^{2-\lambda} \right. \\
&\quad \left. - \sum_{x \in L \cap S} \varphi(g, x) \right) dg
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_{\varphi^*}^{L^*}(\lambda) &= \int_{\substack{|\tilde{\chi}'(g)| \leq 1 \\ G/\Gamma}} |\tilde{\chi}'(g)|^\lambda \left( C_{L^*} \sum_{x \in L \cap S} \hat{\varphi}^*(g, x) |\tilde{\chi}'(g)|^{2-\lambda} \right. \\
&\quad \left. - \sum_{y \in L^* \cap S^*} \varphi^*(\tau \tilde{g}^{-1}, y) \right) dg
\end{aligned}$$

とおけば、仮定 I が成立するとき、 $W_{\varphi}^L(\lambda)$  は  $\lambda$  の整函数であり、 $X_{\varphi}^L(\lambda)$ 、 $X_{\varphi^*}^{L^*}(\lambda)$  は  $\operatorname{Re} \lambda$  が十分大なるとき、 $\lambda$  の正則函数で、

$$\text{等式 } Z_{\varphi}^L(s) = W_{\varphi}^L(s) + X_{\varphi}^L(s)$$

$$Z_{\varphi^*}^{L^*}(s) = C_L^* W_{\varphi^*}^L(1-s) + X_{\varphi^*}^{L^*}(s)$$

が成立する。いま次の仮定を“仮定 II”とよぶことにしよう。

仮定 II  $X_{\varphi}^L(s)$ ,  $X_{\varphi^*}^{L^*}(s)$  はともに  $s$  の全平面で有理型な解析函数に接続され、等式  $X_{\varphi^*}^{L^*}(s) = C_L^* X_{\varphi^*}^L(1-s)$  が成立する。

仮定 I, 仮定 II が成立するならば,  $Z_{\varphi}^L(s)$ ,  $Z_{\varphi^*}^{L^*}(s)$  はともに  $s$  の有理型函数に解析接続され、函数等式

$$Z_{\varphi^*}^{L^*}(s) = C_L^* Z_{\varphi^*}^L(1-s)$$

を満足する。よって定理 A と命題 1 とをあわせて次の命題をうる。

### 命題 2

仮定 I, 仮定 II がともに満足されているならば,  $\xi_i(s)$ ,  $\xi_i^*(s)$ , ( $i=1, 2, \dots, \ell$ ) は全平面で有理型な解析函数に解析接続され、函数等式

$$\begin{aligned} \xi_i(1-s) = & C_L b_0^{-s} (2\pi)^{-as} (\sqrt{-1})^{as} \prod_{k=1}^d \Gamma(s + \lambda_k) \times \\ & \times \sum_{j=1}^d (\operatorname{sgn}_i P \operatorname{sgn}_j Q)^{-s} C_{j,i}(s) \xi_j^*(s). \end{aligned}$$

(記号については定理 A を参照) を満足する。

いま仮定 I が満足されているとして、仮定 II が成立するための一つの十分条件を与えよう。

いま  $G_1 = \{g \in G; \chi(g) = 1\}$  とする。

仮定 II<sub>1</sub>'

任意の  $\varphi \in \mathcal{S}(V)$ ,  $\varphi^* \in \mathcal{S}(V^*)$  に対して  
積分  $\int_{G_1/\Gamma} \sum_{x \in L} \varphi(g \cdot x) dg$ ,  $\int_{G_1/\Gamma} \sum_{y \in L^*} \varphi^*(g^* \cdot y) dg^*$

は絶対収束する。

仮定 II<sub>2</sub>'

$S, S^*$  はともに有限個の  $G_1$ -orbit (それぞれ  $S_1, \dots, S_m; S_1^*, \dots, S_m^*$  とする) の和となり、各々の orbit は  $G_1$  の作用で不変な測度をもち (それぞれ  $\mu_1, \dots, \mu_m; \mu_1^*, \dots, \mu_m^*$  とする) さらにそれら不変測度は次の性質をもつとする。

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(V), \quad \varphi^* \in \mathcal{S}(V^*) \text{ に対して}$$

$$\int_{S_i} \varphi(g \cdot x) d\mu_i(x) = |\chi(g)|^{-2i} \int_{S_i} \varphi(x) d\mu_i(x)$$

$$\int_{S_i^*} \varphi^*({}^t g^{-1} \cdot \varphi) d\mu_i^*(\varphi) = |\chi(g)|^{-n_i^*} \int_{S_i} \varphi^*(\varphi) d\mu_i^*(\varphi)$$

( $\forall g \in G$ ;  $n_i, n_i^*$  は定数)

いま仮定  $\Pi_1', \Pi_2'$  が満足されているとして

$L \cap S_i$  の  $\Gamma$ -同値類の代表系を  $z_i(\mu)$  ( $\mu=1, 2, \dots$ )

$L^* \cap S_i^*$  の  $\Gamma$ -同値類の代表系を  $z_i^*(\mu)$  ( $\mu=1, 2, \dots$ )

としよう。

$H_{z_i(\mu)}$  を  $z_i(\mu)$  の等方群とし、 $\Gamma_{z_i(\mu)} = \Gamma \cap H_{z_i(\mu)}$  とおく、 $G_1, H_{z_i(\mu)}$  の不変測度  $d g_1, d h_{z_i(\mu)}$  をそれぞれ、 $d g = d^* |\chi(g)| d g_1$

$$d g_1 = d \mu_{z_i} (g_1, z_i(\mu)) d h_{z_i(\mu)}$$

なるように定め

$$\sigma_{z_i(\mu)} = \int_{H_{z_i(\mu)} / \Gamma_{z_i(\mu)}} d h_{z_i(\mu)} \quad \text{とおく。}$$

$\sigma_{z_i^*(\mu)}$  も同様に定義する。

仮定  $\Pi_1', \Pi_2'$  が満足されているならば、

$\sigma_{z_i(\mu)}, \sigma_{z_i^*(\mu)}$  はともに有限で、 $\chi_\phi^L(s), \chi_{\phi^*}^{L^*}(s)$  を定義する積分と和とは順序を交換することができ、初等的変形のうち、 $\text{Res}$  が十分大なるとき次式の成立することが証明できる。

$$\begin{aligned}
& X_{\varphi}^L(\lambda) \\
&= C_L \sum_{i=1}^{m^*} \frac{1}{\lambda - \lambda_i + \lambda_i^*} \left( \sum_{\mu=1}^{\infty} \sigma(z_i^*(\mu)) \right) \int_{S_i^*} \hat{\varphi}(y) d\mu_i^*(y) \\
&\quad - \sum_{i=1}^m \frac{1}{\lambda - \lambda_i} \left( \sum_{\mu=1}^{\infty} \sigma(z_i(\mu)) \right) \int_{S_i} \varphi(x) d\mu_i(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& X_{\varphi^*}^{L^*}(\lambda) \\
&= C_L^* \sum_{i=1}^m \frac{1}{\lambda - \lambda_i + \lambda_i^*} \left( \sum_{\mu=1}^{\infty} \sigma(z_i(\mu)) \right) \int_{S_i} \hat{\varphi}^*(x) d\mu_i(x) \\
&\quad - \sum_{i=1}^{m^*} \frac{1}{\lambda - \lambda_i^*} \left( \sum_{\mu=1}^{\infty} \sigma(z_i^*(\mu)) \right) \int_{S_i^*} \varphi^*(y) d\mu_i^*(y)
\end{aligned}$$

(仮定 II' によつて上式右辺の積分と級数は絶対収束する)

従つて次の命題を得る。

命題 3 仮定 I, 仮定 II', II' が成立しているならば仮定 II が成立している。

(注意 仮定 II' が成立しておらず、仮定 II の成立している例はある)

§2

以下  $V = V^{(n)}$  を  $n$  次 Hermite 行列からなる vector 空間とし、 $G = G^{(n)} = GL(n, \mathbb{C})$  とする。 $G$  の  $V$  への作用は、 $g \cdot x = gxg'$  である。

$V$  とその双対を内積  $\langle x, y \rangle = \frac{1}{2} \text{tr} X Y$  によつて

以後同一視する。さすれば  ${}^t\bar{g}^{-1} \cdot x = \bar{g}'^{-1} x \bar{g}^{-1}$  である。

$V$  の測度  $dx$  を

$$dx = \kappa_n \prod_{i < j} d\operatorname{Re} x_{ij} d\operatorname{Im} x_{ij} \prod_i dx_{ii}$$

$$(\kappa_n = 2^{-\frac{n}{2}}, \quad x = (x_{ij}))$$

と定める。さすれば Fourier 反転公式は下図の如

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(y) &= \int \varphi(x) e^{2\pi i \sqrt{\Gamma} \langle x, y \rangle} dx \\ \Rightarrow \varphi(x) &= \int \hat{\varphi}(y) e^{-2\pi i \sqrt{\Gamma} \langle x, y \rangle} dy \end{aligned}$$

$L = L^{(n)}$  を行列要素がすべて Gauss の整数となる  $V$  の元となる格子とし,  $\Gamma = \Gamma^{(n)} = GL(n, \mathbb{Z}[\sqrt{\Gamma}])$  とする。  $L$  は  $\Gamma$  の作用で不変で,  $L$  の双対格子  $L^*$  は  $L$  の元で対角要素がすべて偶数なるものなる部分格子である。

$$\chi(g) = |\det g|^2, \quad P(x) = Q(x) = \det x$$

$$\text{とおけば,} \quad P(g \cdot x) = \chi(g) P(x)$$

$$Q({}^t\bar{g}^{-1} \cdot y) = \chi^{-1}(g) Q(y) \quad \text{である。}$$

また  $d(g \cdot x) = \chi(g)^n dx$  であり従って前節の  $n$  はいまの場合  $n$  に等しい。

$$S = S^* = \{x \in V, \det x = 0\}, \text{ とおき,}$$

$V_i$  を正の固有値  $i$  個, 負の固有値  $n-i$  個を有する  $V$  の元なる集合とすれば,



$V-S = V^* - S^* = \bigcup_{i=0}^n V_i$  で  $V_i$  は  $G$  の 1 つの orbit である。前節定理 A は, この特別な場合は, 次のようになる。

定理 A' いま

$$t_{ij}(s) = (-1)^{(n-i)(n-j)} e^{\pi \sqrt{-1} s (\frac{n}{2} - i - j)} \sum_{k=0}^i \binom{j}{k} \binom{n-j}{i-k} e^{\frac{2\pi \sqrt{-1} k s}{n}}$$

とおけば,

$$\begin{aligned} & \int_{V_i} \phi(x) |\det x|^{s-n} dx \\ &= K_n \pi^{-s n + \frac{n(n-1)}{2}} \Gamma(s) \Gamma(s-1) \cdots \Gamma(s-n+1) \times \\ & \quad \times \sum_{j=0}^n t_{ij}(s) \int_{V_j} \phi(x) |\det x|^{-s} dx \end{aligned}$$

[証明]

定理 A より,  $\phi$  の台は  $\det x \det \begin{pmatrix} x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} = x_{nn} = 0$  なる集合と交わらない compact set であるとして

証明すれば十分である。いま

$$B_+ = \left\{ \begin{pmatrix} t_1 & & \\ & \ddots & \\ & & t_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & z_{ij} & 1 \end{pmatrix} ; \begin{array}{l} t_1, \dots, t_n > 0 \\ z_{ij} \in \mathbb{C} \end{array} \right\}$$

とおけば,  $V$  は  $B_+$  の作用に関してすでに根元均質で, 測度 0 の集合を無視すれば,

$$V_i = \bigcup_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)} B_+ \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \varepsilon_n \end{pmatrix} \quad \text{である。}$$

(ただし  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n = \pm 1$ ,  $\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n = 2i - n$ )

いま  $B_+$  の left Haar measure  $db_+$  を

$$d\mathbf{b}_+ = d^*t_1 \cdots d^*t_n \prod_{i>j} d\operatorname{Re} z_{ij} d\operatorname{Im} z_{ij}$$

と定義すれば,

$$\int_{V_i} \varphi |\det x|^{s-n} dx$$

$$= 2^n \cdot K_n \int_{B^+} \sum_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)} \int \varphi(y) e^{2\pi i \sqrt{-1} \langle y, \mathbf{b}_+ \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} \rangle} d\mathbf{y} (t_1 \cdots t_n)^{s-n} d\mathbf{b}_+$$

である。こゝで積分の順序を交換すれば

(その際多少注意を要する) 初等的計算で定理の結果を得る。

以下仮定 I が成立していることを検証する。

Hermite 型式の理論によつて  $\ell$  を自然数とすると、 $\det x = (-1)^{n-\ell} \ell$  なる  $L^{(i)} = L \cap V_i$  の元の全体は有限個の  $\Gamma$ -orbit の和となる各軌道から一つずつ元をとつてそれらを、

$x_1^{(i)}(\ell), \dots, x_{h^{(i)}(\ell)}^{(i)}(\ell)$  とし、それらうち  $L^*$  に属するものを

$x_1^{(i)*}(\ell), \dots, x_{h^{(i)*}(\ell)}^{(i)*}(\ell)$  としよう  
 さすれば  $\bigcup_{i=0}^n \bigcup_{\ell=1}^{\infty} \bigcup_{h=1}^{h^{(i)}(\ell)} x_h^{(i)}(\ell), \bigcup_{i=0}^n \bigcup_{\ell=1}^{\infty} \bigcup_{h=1}^{h^{(i)*}(\ell)} x_h^{(i)*}(\ell)$   
 はそれぞれ、 $L, L^*$  の  $\Gamma$ -同値類の代表系である。さうして従つて  $\Gamma(x_h^{(i)}(\ell)), m(x_h^{(i)}(\ell)),$   
 $\Gamma^*(x_h^{(i)*}(\ell)), m^*(x_h^{(i)*}(\ell))$  を定義する。

以下  $G$  の不変測度  $d\theta$  を,  $i=0, \dots, n$  なるとき,

$m(x_k^{(i)}(l))$  が有限群  $\Gamma(x_k^{(i)}(l))$  の 位数 と等しくなるように正規化する (可能である)。<sup>位数の</sup>

このとき  $\sum_{k=1}^{h(l)} m(x_k^{(i)}(l))$ ,

は行列式  $(-1)^{n-i}$  なる  $L \cap V_2$  の元からす  
種達の種の測度の和に等しい。 $\sum_{k=1}^{h^*(l)} m(x_k^{(i)*}(l))$

についてと同様のことがいえる。従って Hermite 形式  
の理論により, それらの  $l \rightarrow +\infty$  のとき増大度  
は  $l$  の適当な中乗でおさえられることがしられる。

よって Dirichlet 級数

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sum_{k=1}^{h(l)} m(x_k^{(i)}(l))}{l^s} = \zeta_i^{(n)}(s)$$

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sum_{k=1}^{h^*(l)} m(x_k^{(i)*}(l))}{l^s} = \zeta_i^{(n)*}(s)$$

は  $\text{Re}(s)$  が十分大なるとき絶対収束する。すな  
わち仮定 I が成立している。なお正規化された  
 $d\theta$  は具体的には次のように記述される。いま  $e_{ij}$   
を  $i$  行  $j$  列成分が 1 で, 他は 0 なる  $gl(n, \mathbb{C})$   
の元とし,  $\omega_{ij}, \omega'_{ij}$  をそれぞれ  $e_{ij}, \sqrt{-1}e_{ij}$  と  
双対な  $G$  上の左不変微分形式とすると,

$$\int f(\theta) d\theta = C_n \int f(\theta) \prod_{i,j=1}^n \omega_{ij} \wedge \omega'_{ij}$$

$$(C_n = K_n \prod_{k=1}^n \prod_{l=1}^{h(l)} \Gamma(l))$$

なお 後に用いられる定数  $J_n$  を次のように定義する。

$$J_n = \int_{G_1^{(n)}/\Gamma^{(n)}} \prod_{i \neq j} d\omega_{ij} d\omega'_{ij} \prod d\omega_{ii} \prod_{1 \leq i < j \leq n} d\omega_{ii}$$

( $G_1^{(n)}$  の定義は下に与えられている)

次に仮定  $\Pi_1, \Pi_2$  が成立していることを検証する。Weil の論文 "La Formule de Siegel et les groupes classiques" (Acta 1965) 20 頁の Lemma 5 によれば "今の場合

$$\int_{G_1/\Gamma} \sum_{x \in L} \varphi(g \cdot x) dg \quad (\varphi \in \mathcal{S}(V))$$

$$\int_{G_1/\Gamma} \sum_{y \in L^*} \varphi(g^* \cdot y) dg$$

がともに絶対収束することがわかる。

よって仮定  $\Pi_1$  は成立している。

$$(G_1 = G_1^{(n)} = \{g \in G, |\det g| = 1\})$$

$V^{(n, r)}$  で rank  $r$  の hermite 行列のなす  $V$  の部分集合,  $V_i^{(n, r)}$  で正の固有値を  $i$  個, 負の固有値を  $r-i$  個もつ元よりなる  $V^{(n, r)}$  の部分集合を表わすことにすれば,  $V_i^{(n, r)}$  は  $G_1$  の 1 つの orbit で

$$S = \bigcup_{t=0}^{n-1} \bigcup_{i=0}^r V_i^{(n,t)} \text{ である。}$$

$V^{(n,2)}$  の測度  $d\mu^{(n,2)}$  を次の如く定めれば、それは  $G_4$  の作用で不変である。

$$t > 0 \text{ なら } V^{(n,2)} \ni x = (x_{ij}) \text{ なるとき}$$

$$d\mu^{(n,t)} = \left| \det \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1,t} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{t1} & \cdots & x_{tt} \end{pmatrix} \right|^{t-n} \prod_{\substack{i > j \\ j \leq t}} d\operatorname{Re} x_{ij} d\operatorname{Im} x_{ij} \times \prod_{1 \leq i \leq t} dx_{ii}$$

$t = 0$  なら  $\delta$  である。

$$d\mu^{(n,t)} = \delta(0)$$

そして

$$\int_{V_i^{(n,t)}} \varphi(g \cdot x) d\mu^{(n,t)} = |\chi(g)|^{n-2} \int_{V_i^{(n,2)}} \varphi(x) d\mu^{(n,2)}$$

$$(\varphi \in \mathcal{S}(V), g \in G)$$

である。よって仮定  $\Pi_2'$  が成立していることがわかる。

$$L \cap V_i^{(n,t)} \text{ の } \Gamma \text{ 同値類の代表系として } \left\{ \begin{pmatrix} x_t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, x_t: L^{(t)} \cap V_i^{(t)} \text{ の } \Gamma^{(t)} \text{ 同値類の代表系} \right\}$$

をとることができることに注意すれば、 $X_0^L(\mathcal{A})$ ,  $X_{\varphi^*}^{L^*}(\mathcal{A})$  は前節よりさらに具体的に次の如く表示されることがわかる。

$$\begin{aligned}
& X_0^L(\lambda) \\
&= C_L \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{i=0}^r \frac{1}{2n\lambda - 2n^2 + 2rn} \frac{C_n}{C_r} t_{n-r} \Xi_i^{(r)*}(n) x \\
&\quad \times \int_{V_i^{(n,r)}} \hat{\varphi}(x) d\mu^{(n,r)}(x) \\
&\quad - \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{i=0}^r \frac{1}{2n\lambda - 2rn} \frac{C_n}{C_r} t_{n-r} \Xi_i^{(r)}(n) x \\
&\quad \times \int_{V_i^{(n,r)}} \varphi(x) d\mu^{(n,r)}(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& X_{\varphi^*}^{L*}(\lambda) \tag{#} \\
&= C_L^* \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{i=0}^r \frac{1}{2n\lambda - 2n^2 + 2rn} \frac{C_n}{C_r} t_{n-r} \Xi_i^{(r)}(n) x \\
&\quad \times \int_{V_i^{(n,r)}} \hat{\varphi}^*(x) d\mu^{(n,r)}(x) \\
&\quad - \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{i=0}^r \frac{1}{2n\lambda - 2rn} \frac{C_n}{C_r} t_{n-r} \Xi_i^{(r)*}(n) x \\
&\quad \times \int_{V_i^{(n,r)}} \varphi^*(x) d\mu^{(n,r)}(x)
\end{aligned}$$

$$( \text{いまの場合 } C_L = 2^{\frac{n}{2}} \quad C_L^* = 2^{\frac{n}{2}} )$$

また  $t_n$  は 前々頁で定義された数

また  $C_0 = 1$  とおく

最後に  $\xi_i^{(n)}(s)$ ,  $\xi_i^{(n)*}(s)$  の極における留数を計算する。

いま  $\varphi$  の台が compact で  $V_i$  に含まれているとする。さすれば

$$\begin{aligned} & \xi_i^{(n)}(s) \int_{V_i} \varphi(x) |\det x|^{s-n} dx \\ &= W_\varphi^L(s) + C_L \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{i=0}^r \frac{1}{2n-1-2n^2+2r+2n} \frac{C_{n+r-i}}{C_r} \xi_i^{(n)*}(s) \\ & \quad \times \int_{V_i^{(n,r)}} \hat{\varphi}(x) d\mu^{(n,r)}(x) \quad (4) \end{aligned}$$

である。

$W_\varphi^L(s)$ ,  $\int_{V_i} \varphi(x) |\det x|^{s-n} dx$  は,  $\varphi$  に関する仮定からともに exponential type の整函数である。従って  $\prod_{r=0}^{n-1} (s-n+r) \times \xi_i^{(n)}(s)$  は exponential type の整函数の比として表示される整函数で、その位数は 1 を超えない。(Titchmarsh Theory of Functions の 255 頁をみよ) さらに定理 A' の証明と同じ方法で次の命題が証明される。

命題  $\varphi$  の台が compact で,  $V-S$  内に含まれるならば,

$$\begin{aligned} & \int_{V^{(n, r)}_i} \varphi(x) d\mu^{(n, r)}(x) \\ &= K_r \pi^{-\frac{r(r+1)}{2}} \Gamma(r) \Gamma(r-1) \cdots \Gamma(1) \times \\ & \quad \times (\sqrt{-1})^{rn} (-1)^{(r-i)(n+r+1)} \binom{r}{i} \times \\ & \quad \times \int_V \varphi(x) (\det x)^{-r} dx \end{aligned}$$

この命題と前頁(4)より

$\Sigma_i^{(n)}(s)$  の  $s = n-r$  における留数は

$$\begin{aligned} & (-1)^{(n-i)r} C_L \frac{1}{2n} \frac{C_n}{C_r} t_{n-r} K_r \pi^{-\frac{r(r+1)}{2}} \Gamma(r) \cdots \Gamma(1) \times \\ & \quad \times (\sqrt{-1})^{rn} \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} (-1)^{(r-j)(n+r+1)} \Sigma_j^{(r)*}(n) \end{aligned}$$

である。

同様に  $\Sigma_i^{(n)*}(s)$  の  $s = n-r$  における residue は

$$\begin{aligned} & (-1)^{(n-i)r} C_L^* \frac{1}{2n} \frac{C_n}{C_r} t_{n-r} K_r \pi^{-\frac{r(r+1)}{2}} \Gamma(r) \cdots \Gamma(1) \times \\ & \quad \times (\sqrt{-1})^{rn} \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} (-1)^{(r-j)(n+r+1)} \Sigma_j^{(r)}(n) \end{aligned}$$

である。

以上で冒頭の定理は証明された。